



# I. Wprowadzenie

Niniejszy moduł składa się z 10 wprowadzeń wideo do Modellusa. Ilustrują one większość jego funkcji i zastosowań.

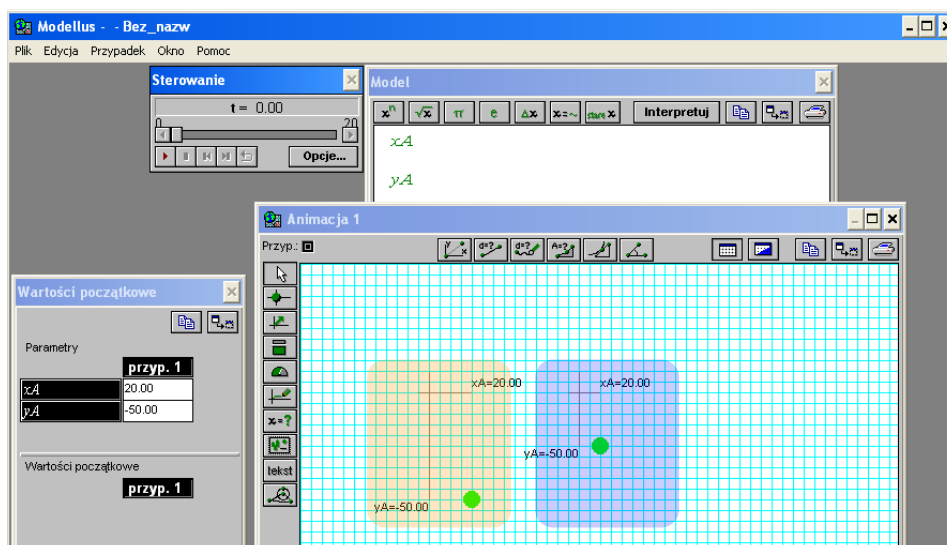
## 1. Podstawy teoretyczne.

### Współrzędne kartezjańskie na płaszczyźnie.

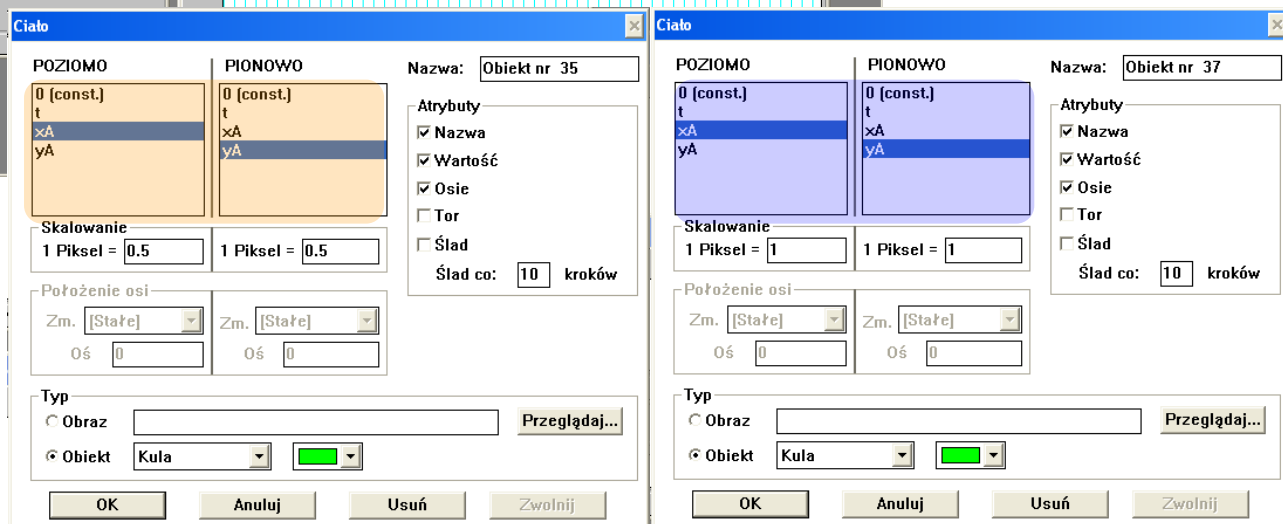
Dowolny punkt na płaszczyźnie może służyć jako początek układu współrzędnych. W takim punkcie znajduje się początek dwóch prostopadłych do siebie osi.

Każda z osi jest linią prostą skierowaną. Po wprowadzeniu jednostki odległości na osi, każdemu punktowi na niej odpowiada liczba rzeczywista. Tak więc punktowi na płaszczyźnie jednoznacznie odpowiada para liczb, po jednej dla każdej z osi; są to współrzędne kartezjańskie tego punktu.

Modellus wykorzystuje punkt ekranowy, piksel, jako jednostkę: domyślnie 1 piksel = 1 jednostka. Ustawienie to można łatwo zmienić dla wszystkich obiektów Modellusa.



Te dwie części mają jednakowe współrzędne, ale w różnych skalach.



## Wektory

Wektory to matematyczne wielkości, mające wartość (długość) i kierunek. Wektor definiujemy poprzez podanie jego współrzędnych (składowych). Każda współrzędna wektora jest wielkością skalarną.

Wektory w Modellusie zdefiniowane są za pomocą dwóch składowych skalarnych. Te dwie składowe pozwalają wyznaczyć wartość wektora oraz jego kierunek, czyli kąt, jaki tworzy wektor z którąkolwiek z osi.

Wektor zdefiniowany przez dwie składowe, poziomą i pionową.

**Wektor nr 40**

POZIOMO	PIONOWO
0 [const.]	0 [const.]
t	t
v	v
<b>vx</b>	<b>vx</b>
<b>vy</b>	<b>vy</b>

Skalowanie: 1 Piksel = 1

Położenie: [Stałe]

Atrybuty:  Nazwa,  Wartość,  Osie,  Grot,  Ślad

Ślad co: 10 kroków

Widok:  Składowe,  Wypadkowa

Kolor: [Czarna], Grubość: 3

**Wektor nr 40-43**

POZIOMO	PIONOWO
0 [const.]	0 [const.]
t	t
v	v
<b>vx</b>	<b>vx</b>
<b>vy</b>	<b>vy</b>

Skalowanie: 1 Piksel = 1

Położenie: [Stałe]

Atrybuty:  Nazwa,  Wartość,  Osie,  Grot,  Ślad

Ślad co: 10 kroków

Widok:  Składowe,  Wypadkowa

Kolor: [Czarna], Grubość: 3



## Zmienne, funkcje, tabele i wykresy

Zmienne opisują właściwości ciał, przestrzeni, itd. Większość zmiennych w fizyce wyraża się przez liczby rzeczywiste mianowane, czyli opatrzone jednostkami.

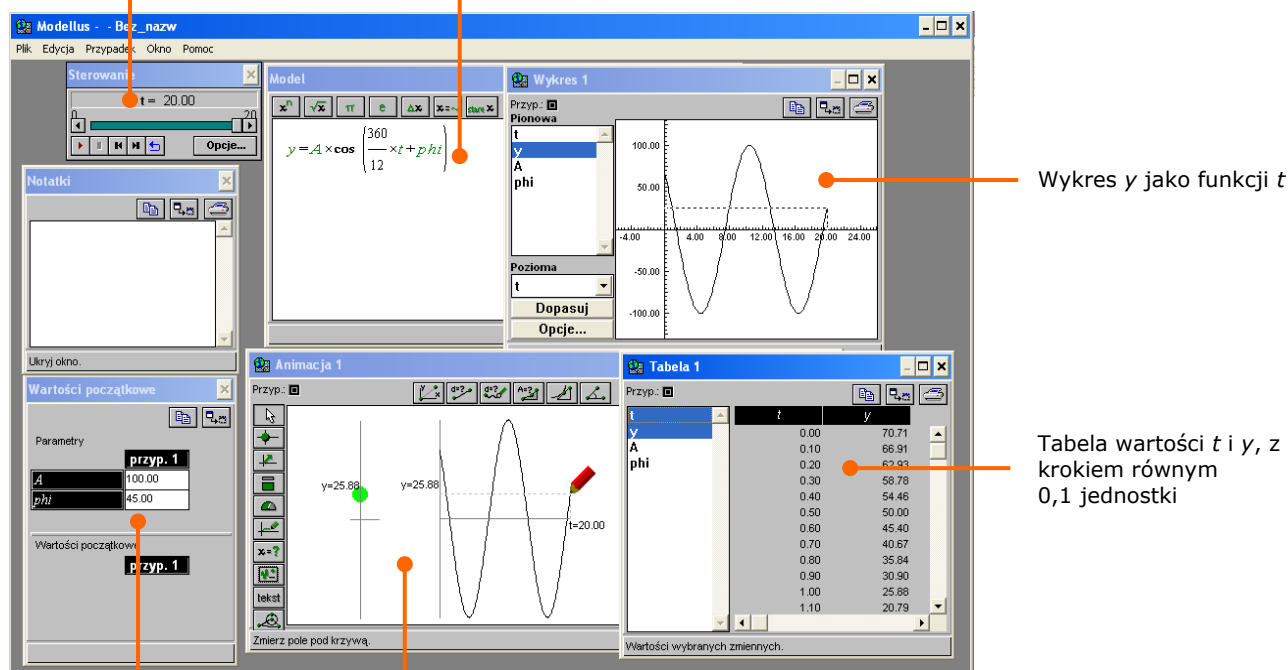
Niektóre zmienne zależą od innych zmiennych. Funkcja opisuje związek pomiędzy zmiennymi niezależną i zależną. Definicja funkcji wymaga, by dla jednej wartości zmiennej niezależnej była tylko jedna wartość zmiennej zależnej.

Zależność pomiędzy zmiennymi można przedstawić słownie, a także za pomocą tabeli wartości, wykresu lub wyrażenia matematycznego. Ten ostatni sposób jest na ogół najbardziej zwięzłym wyrażeniem zależności pomiędzy zmiennymi.

Oprogramowanie naukowe, w szczególności Modellus, jest bardzo przydatne gdy zależy nam na połączeniu różnych sposobów przedstawiania funkcji oraz innych matematycznych obiektów.

Zmienna niezależna  $t$ , z domyślną dziedziną  $\langle 0; 20 \rangle$

Funkcja:  $y$  jest funkcją  $t$



Animacja zmian  $y$  wraz z wykresem  $y$  jako funkcji  $t$

Wartości parametrów  $A$  i  $\varphi$  ( $f$ ) rozpatrywanej funkcji



## Drgania, funkcje i równania różniczkowe

Funkcje sinus i cosinus służą do opisu drgań harmoniczych. Drganie takie charakteryzowane jest przez okres (bądź częstotliwość), amplitudę oraz fazę. Dwie ostatnie wielkości zależą od warunków początkowych drgania.

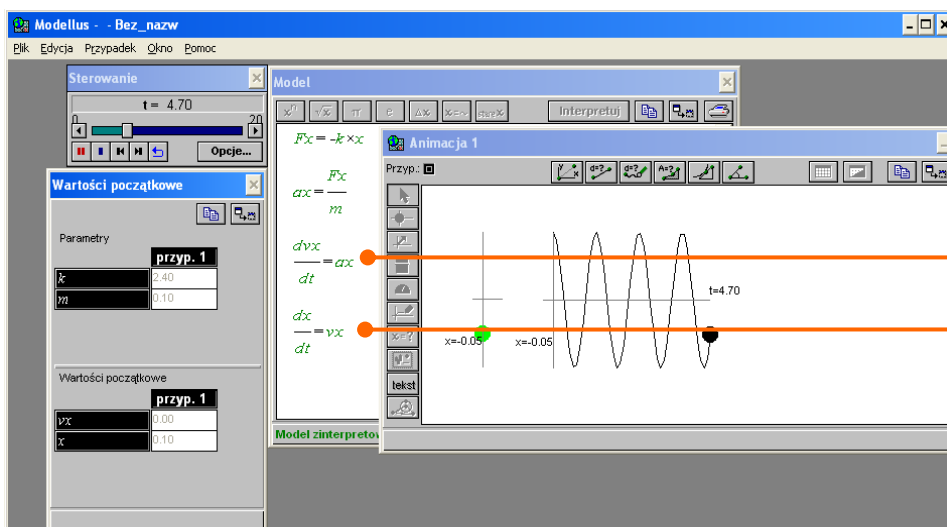
Modellus wykorzystuje zarówno funkcje jak i numeryczne całkowanie dla badania drgań. Przykładowo, użytkownik może opisać drganie (położenie, prędkość, itd.) za pomocą funkcji sinus lub cosinus. Może też wyjść z prawa Hooke'a (wartość siły powrotnej w układzie drgającym jest proporcjonalna do chwilowego wychylenia) by wyznaczyć przyspieszenie, a następnie wyrazić prędkość jako całkę z przyspieszenia i na koniec położenie jako całkę z prędkości.

By scałkować równanie użytkownik musi zdefiniować krok całkowania. Nowa zmienna powstaje poprzez sumowanie zmian zmiennej podcałkowej. Modellus używa domyślnie kroku całkowania równego 0,1 jednostki oraz metody Runge-Kutta czwartego rzędu.

Całkowanie może być także przeprowadzane za pomocą procedur iteracyjnych, jak w metodzie Eulera czy Eulera-Crömera.

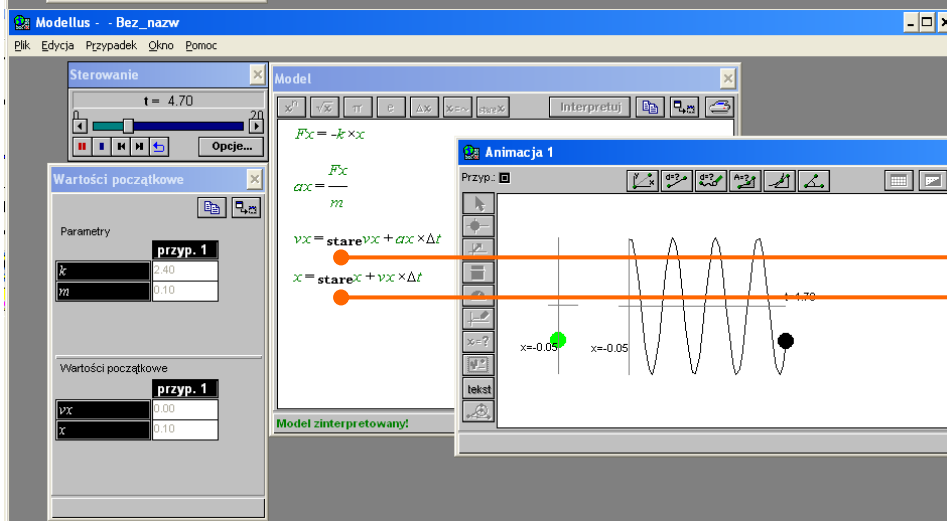
$$y = A \times \cos\left(\frac{360}{12} \times t + \phi\right)$$

Drganie można także otrzymać za pomocą równań różniczkowych ...



Chwilowa szybkość zmiany prędkości jest przyspieszeniem ...

Równie dobrze drganie można uzyskać z procedury iteracyjnej ...



Prędkość po każdym kroku całkowania zmienia się o iloczyn szybkości zmian (przyspieszenia) i przedziału czasu ...

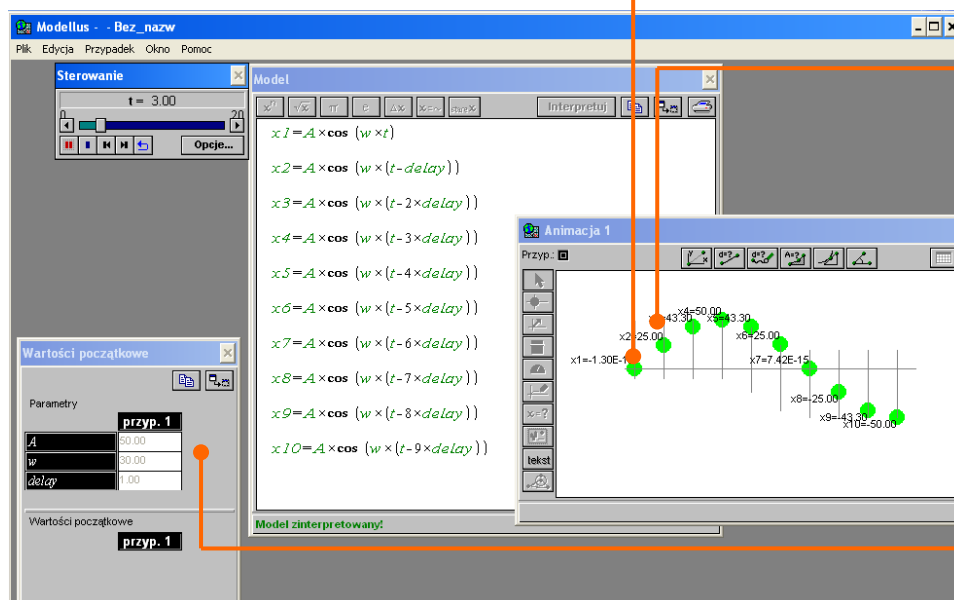
Położenie po każdym kroku całkowania zmienia się o iloczyn szybkości zmian (prędkości) i przedziału czasu ...



## Fale

Z matematycznego punktu widzenia fala to zmiana - w stosunku do wartości równowagowej - jednej właściwości fizycznej (lub kilku), zachodząca w czasie i w przestrzeni.

Niektóre rodzaje fal mogą być opisywane za pomocą funkcji sinusoidalnej. W każdym punkcie przestrzeni określona wielkość zmienia się okresowo. W każdym kolejnym punkcie wielkość ta zmienia się z opóźnieniem w stosunku do punktu poprzedniego.



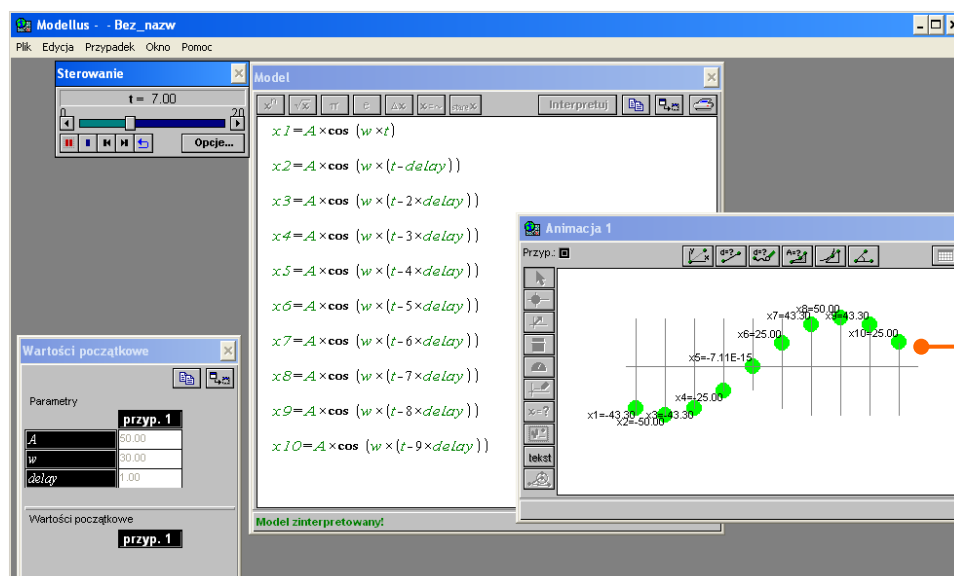
Ten punkt ośrodka wykonuje drgania ...

Drugi punkt w ośrodku opóźnieniem w stosunku do pierwszego ...

Trzeci punkt drga z opóźnieniem dwukrotnie większym ...

itd. ...

Amplituda i częstotliwość każdego z drgań  
Opóźnienie drgań drugiego punktu

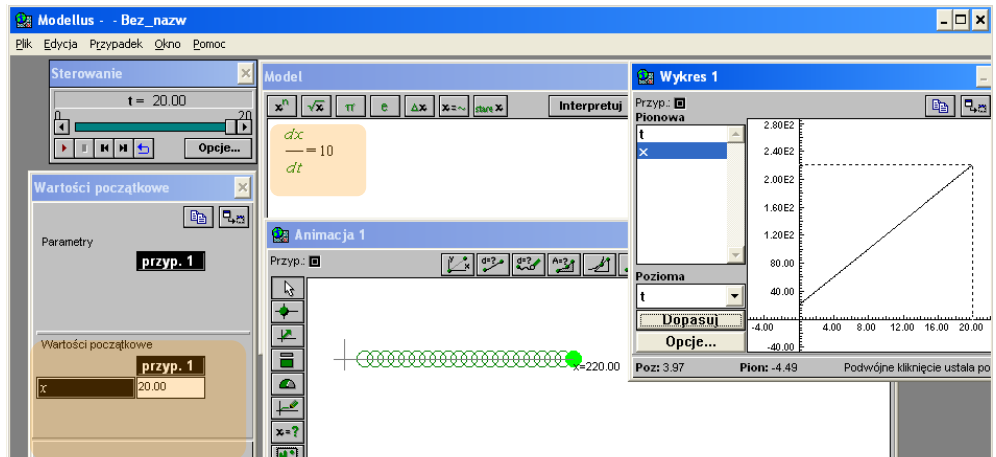


Drgania wszystkich punktów tworzą falę poprzeczną (kierunek drgań punktów jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali).

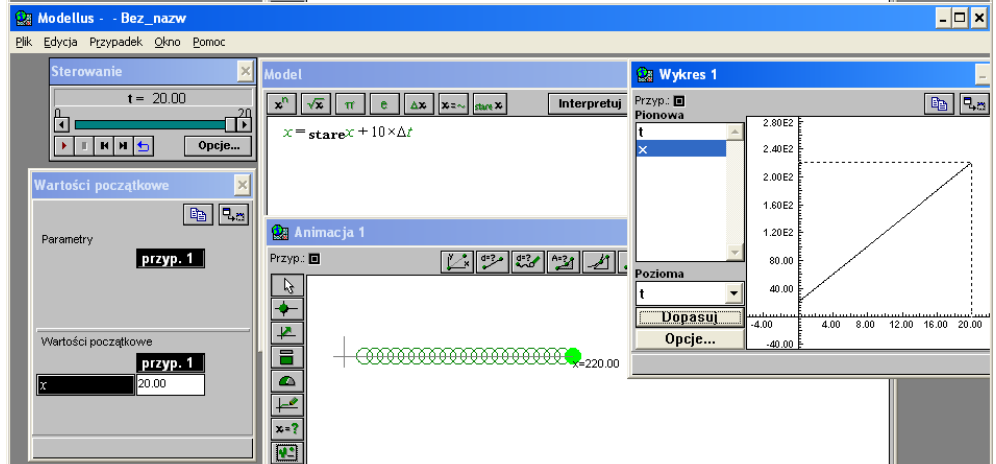
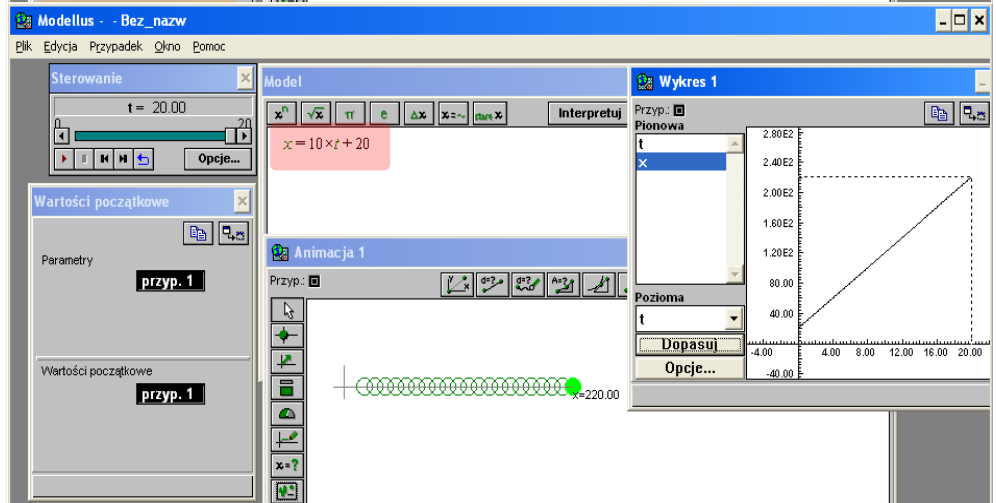
## Równania różniczkowe i funkcje

Funkcja  $x = 10 t$  oznacza, że zmiana  $x$  wynosi 10 jednostek na każdą jednostkę zmiany  $t$ . Inaczej: każdej zmianie  $t$  o jedną jednostkę odpowiada zmiana  $x$  o 10 jednostek.

Związek ten można także przedstawić jako równanie różniczkowe  $dx/dt = 10$ . Równanie to można rozumieć jako "chwilowa szybkość zmiany  $x$  wynosi 10 jednostek". Jednak by rozpocząć wyznaczanie  $x$ , program musi znać „początkową wartość  $x$ ”; znana jest szybkość zmian, więc trzeba wiedzieć, od jakiej wartości zmiany te się zaczynają ...



Każda funkcja typu  $x = 10 t + stała$  jest analitycznym rozwiązaniem równania różniczkowego  $dx/dt = 10$ ; *stała* jest początkową wartością zmiennej  $x$ .



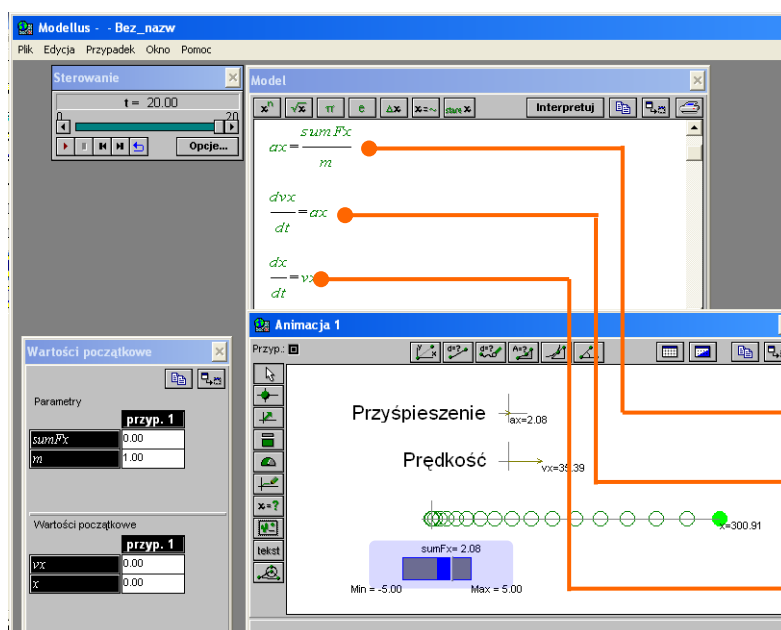


## Równania różniczkowe i bezwładność

Prędkość jest chwilową szybkością zmian wektora położenia (jest to wektor zaczepiony w początku układu współrzędnych i wskazujący punkt, w którym znajduje się ciało). Dla zagadnienia jednowymiarowego oznacza to, że składowa  $v_x$  prędkości jest chwilową szybkością zmiany położenia  $x$ . Podobnie, przyspieszenie jest chwilową szybkością zmiany prędkości, co w przypadku jednowymiarowym sprowadza się do stwierdzenia, że składowa  $a_x$  przyspieszenia jest chwilową szybkością zmiany prędkości  $v_x$ .

Modellus rozwiązuje równania różniczkowe korzystając z metody numerycznej. Oznacza to, na przykładzie ruchu jednostajnie przyspieszonego, że analityczne rozwiązanie  $x = at^2/2$  nie jest znane. Jednak wykorzystywana metoda jest na tyle skuteczna, że uzyskiwane rozwiązanie numeryczne jest praktycznie tożsame z analitycznym. Tak jest nie tylko w przytoczonym przykładzie, ale także w wielu innych. Podstawową ideą rozwiązań numerycznych jest obliczanie nowej wartości zmiennej (powiedzmy  $x$ ) za pomocą algorytmu typu nowa wartość = wartość poprzednia + szybkość zmian razy krok czasowy. Jeśli znamy „szybkość zmian” a wartość „kroku czasowego” jest wystarczająco mała, to takie iteracyjne postępowanie pozwala wyznaczać kolejne wartości zmiennej w funkcji upływającego czasu.

Zalety metod numerycznych do rozwiązywania równań różniczkowych są w miarę oczywiste: kontrolowanie szybkości zmian umożliwia użytkownikowi wpływanie na ruch obiektu po ekranie.



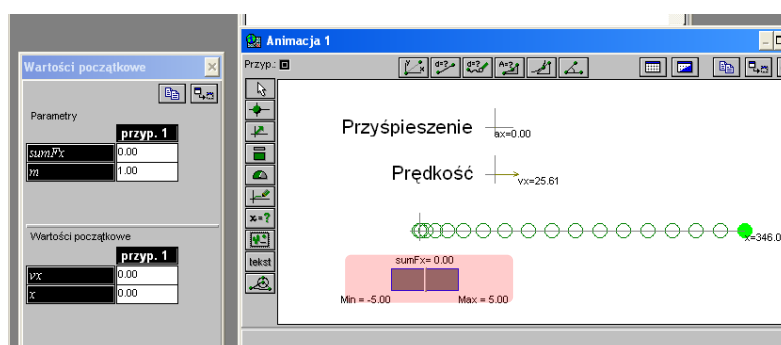
Ten model ilustruje matematyczny opis bezwładności. Przypiszmy wartości zero wszystkim parametrom z wyjątkiem masy - ta niech wynosi 1. Przypiszmy Kontrolerowi poziomemu wyróżnione właściwości. Uruchommy model i po kilku sekundach przesunmy Kontroler poziomu  $sumFx$  w prawo. Obiekt zaczyna się poruszać ruchem przyspieszonym. Ustawmy ponownie Kontroler na zero (wypadkowa siła  $sumFx$  staje się równa zero) i przekonamy się, że obiekt nadal się porusza ruchem jednostajnym, chyba że znowu zmienimy wypadkową siłę.

Druga zasada dynamiki Newtona pozwala znaleźć przyspieszenie, czyli szybkość zmian prędkości.

Szybkość zmian prędkości jest przyspieszeniem...

Szybkość zmian położenia jest prędkością ...

Obiekt przyspiesza w prawo (wypadkowa siła ma zwrot w prawo) ...



Obiekt porusza się w prawo ze stałą prędkością po tym, jak został przyspieszony w prawo (podczas przyspieszania wypadkowa siła ma zwrot w prawo; potem ma wartość zero) ...





## Ciążenie powszechne i równania różniczkowe

Prawo powszechnego ciążenia Newtona pozwala obliczyć siłę grawitacyjnego oddziaływania dwóch obiektów, gdy znane są ich masy oraz odległość między nimi. Przyjmijmy, że jeden z obiektów (np. planeta) ma masę  $m_1$ , dużą w porównaniu z masą  $m_2$  satelity, rakiety kosmicznej, czy czegokolwiek innego. Wtedy, po umieszczeniu planety w początku układu współrzędnych można uznać, że jedynie masa  $m_2$  będzie się poruszać w polu grawitacyjnym masy  $m_1$ .

Tworzenie matematycznego modelu tego oddziaływania zaczniemy od obliczenia odległości  $r$  pomiędzy obiektami. Następnie obliczamy wartości siły grawitacji i przyspieszenia obiektu  $m_2$ . Przyspieszenie rozkładamy na składowe  $x$  i  $y$ , korzystając z prostych związków trygonometrycznych (sinus i cosinus); uwzględniamy przyciągający charakter grawitacji za pomocą znaków „minus” przy składowych - siła i przyspieszenie mają zwrot ku początkowi układu współrzędnych. Gdy mamy składowe przyspieszenia, możemy zapisać, dla obu wymiarów, że szybkość zmian prędkości to przyspieszenie oraz że szybkość zmian położenia to prędkość.

W okienku Wartości początkowe widać, że stałej grawitacji  $G$  przypisano umowną wartość 1 (dla uproszczenia zagadnienia), masa  $m_1$  jest 10000 razy większa od masy  $m_2$  (to uzasadnia pominięcie skutków działania siły grawitacji na  $m_1$ ), położenie początkowe masy  $m_2$  jest równe  $(-50; 50)$ , zaś początkowa jej prędkość ma wartość 20 jednostek i kierunek zgodny z osią OX.

The screenshot shows the Modellus software interface for a physics model. The main window displays the following equations:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

$$a = \frac{F}{m_2}$$

$$a_x = a \times \left( \frac{x}{r} \right)$$

$$a_y = a \times \left( \frac{y}{r} \right)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = a_y$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

The interface also includes a control panel with a time slider (t = 12.80), a parameter table for initial values, and an animation window showing a parabolic trajectory of a mass in a 2D coordinate system.

Odległość pomiędzy obiektami (ciało o większej masie jest umieszczone w początku układu współrzędnych).

Prawo powszechnego ciążenia Newtona

Obliczanie wartości przyspieszenia ciała o mniejszej masie

Obliczanie składowych przyspieszenia

Chwilowa szybkość zmian prędkości jest przyspieszeniem

Chwilowa szybkość zmian położenia jest prędkością



## Kinetyka reakcji chemicznych, równowaga chemiczna i równania różniczkowe

Za pomocą równań różniczkowych można modelować wiele różnych zjawisk. Kolejny przykład, który omówimy w tym module, to kinetyka reakcji chemicznych.

Podstawowym pojęciem w kinetyce reakcji chemicznych jest równanie kinetyczne. Wyraża ono matematycznie zależność szybkości reakcji od stężenia (lub innych właściwości fizycznych) reagentów.

W ogólnym przypadku reakcji  $A + B \rightarrow C$ , najprostsze równanie kinetyczne ma postać:

$$v = k A^a B^b$$

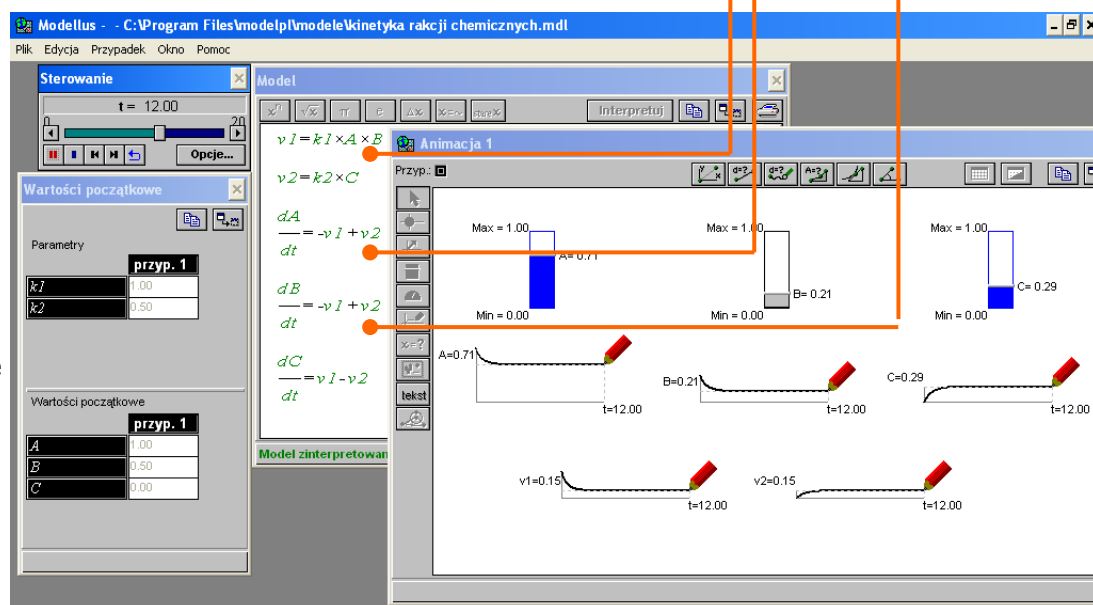
W tym równaniu  $A$  i  $B$  oznaczają stężenia substratów reakcji, wyrażone na ogół w molach na liter, zaś  $k$  jest współczynnikiem reakcji, lub stałą szybkości reakcji (w rzeczywistości, nie jest to wielkość stała - opisuje wszystkie warunki przebiegu reakcji, jak temperaturę, które nie są związane ze stężeniem). Wykładniki  $a$  i  $b$  nazywane są rzędami reakcji i zależą od mechanizmu reakcji. Są one często takie same jak współczynniki stechiometryczne w chemicznym zapisie reakcji. Skomplikowane równania kinetyczne reakcji chemicznych mogą zawierać sumę wyrażen a nawet wyrażenia w mianowniku.

Szybkość reakcji prostych i odwrotnych

Jak zmienia się w czasie stężenie substancji A...

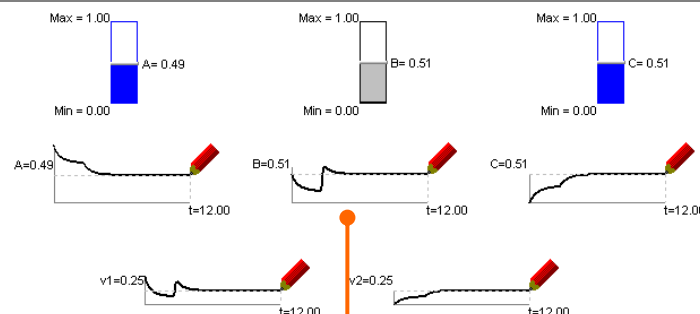
Jak zmienia się w czasie stężenie substancji C...

Równania opisujące szybkość reakcji to równania różniczkowe, które można całkować analitycznie lub numerycznie. Uzyskuje się funkcje, opisujące zależności czasowe stężeń.



Dla reakcji odwracalnych, równowaga chemiczna odpowiada stanowi, w którym stężenia substancji nie zmieniają się w czasie. Ogólnie rzecz biorąc, równowaga jest osiągana gdy szybkość reakcji w obie strony jest jednakowa. W stanie równowagi, przy jednakowych szybkościach reakcji w obie strony, nie następują zmiany w stężeniu reagentów (równowaga ma charakter dynamiczny).

Zasada Le Chateliera pozwala przewidywać zachowanie się układu, będącego w równowadze, po zmianie stężenia (lub innych właściwości) reagentów. Następuje przesunięcie stanu równowagi, które częściowo przeciwstawia się wprowadzonej zmianie. W przedstawionym na tej stronie przykładzie, po zwiększeniu stężenia substratu B, układ zostaje zmuszony do zmniejszenia ilości tego substratu i do zwiększenia stężenia reagentów A i C. Po tej zmianie, szybkości reakcji w obie strony ponownie staną się jednakowe.



Jak zachowa się układ po zwiększeniu stężenia substancji B?



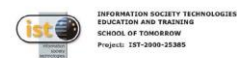
## 2. Wprowadzane pojęcia

W niniejszym module przyjęto, że czytelnik (nauczyciel kształcący uczniów bądź nauczycieli) jest obeznany z określonymi pojęciami z zakresu matematyki, fizyki i chemii. Celem tego modułu jest zilustrowanie, za pomocą konkretnych przykładów, takich pojęć, jak:

- układ współrzędnych, początek układu współrzędnych, współrzędne na płaszczyźnie;
- zmienne niezależne i zmienne zależne;
- funkcje i ich wykresy;
- skale;
- wektory i ich składowe;
- prędkość, wartość prędkości, przyspieszenie;
- zasady dynamiki Newtona;
- funkcje liniowe, kwadratowe i trygonometryczne;
- drgania i prawo Hooke'a;
- fale;
- równania różniczkowe, całkowanie analityczne i numeryczne;
- prawo powszechnego ciążenia;
- kinetyka reakcji chemicznych i równowaga reakcji.

## 3. Informacje dodatkowe

Załącznikiem do tego modułu jest tekst dotyczący metodologii stosowania modelowania w nauczaniu szkolnym. Jest to zestaw czynności nauczyciela, wspomagających proces uczenia się uczniów. Czasami metodologię postrzega się jako coś, czego nie można przekazać drugiej osobie, jednak w rzeczywistości jest ona wynikiem złożonego procesu nauczania, osobistych doświadczeń oraz przemyśleń. Metodologia nakreśla ramy postępowania, opartego na sześciu następujących zasadach: zaangażowanie w nauczanie, w sprawę uczniów i ich uczenia się; znajomość matematyki i nauk ścisłych; wiedza o uczniach; opanowanie sztuki nauczania; myślenie w kategoriach naukowych; refleksja i rozwój zawodowy. Wynika z niej trzynastą propozycji: (1) stawiaj jasno określone cele i przewiduj tok myślenia i ewolucję koncepcji w trakcie zajęć, uprzedzisz dzięki temu pojawianie się trudności w nauczaniu; (2) ujawniaj i werbalizuj koncepcje uczniowskie; (3) popieraj współdziałanie, współpracę oraz solidarność grupową; (4) zapewniaj słuchaczom szybką informację zwrotną; (5) zachęcaj do samooceny oraz do oceny wewnątrzgrupowej; (6) przechodź od konkretnego do abstrakcji; (7) podawaj słowny opis czynności matematycznych; (8) korzystaj z pisania i ze schematów jako z „narzędzi do myślenia”; (9) pomagaj przechodzić od obliczeń do przekształceń algebraicznych, od rozumowania na liczbach do rozumienia symboli; (10) badaj różne sposoby przedstawiania; (11) ukonkretniaj - na ile się da - obiekty abstrakcyjne, ale wskazuj różnice pomiędzy „rzeczywistym obiektem” a jego reprezentacją; (12) łącz w sposób wyważony nauczanie przez odkrywanie z nauczaniem kierowanym; (13) przewiduj, sprawdzaj i przeglądaj spójność modelu i danych.



**MODELLINGSPACE**  
Space of ideas' expression, modelling and collaboration  
for the development of imagination, reasoning and learning



**Development of Pedagogical Methodology**

Deliverable: D13  
Contractual Delivery Date: September 2003  
Version: Final  
Type: Public  
Responsible Partner: ICTULB



## II. Podejście dydaktyczne

### 1. Kontekst Pedagogiczny

Ćwiczenia prezentowane w tym module mogą być wykorzystywane w nauczaniu młodzieży i nauczycieli, zarówno na fizyce i chemii jak i na matematyce.

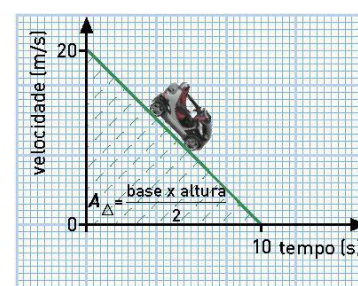
Ćwiczenia te nie są częścią żadnego kursu. Ilustrują one po prostu jak można wykorzystać Modellusa do modelowania i badania różnych zjawisk.

### 2. Typowe trudności uczniów

Badania w zakresie nauczania fizyki, chemii i matematyki jednoznacznie pokazują, że zarówno uczniowie jak i nauczyciele często miewają trudności w rozumieniu większości pojęć, pomysłów i praw wykorzystywanych w warsztatach.

Nawet w podręcznikach szkolnych można znaleźć błędy, jak ten, pokazany na rysunku z prawej. Szczególną uwagę należy poświęcić zawartości i interpretacji różnych wizualizacji, jak na przykład wykresów, trajektorii, wektorów, itd. Uczący się powinni skupiać się na znaczeniu tego, co widać a nie tylko na „formie rysunku”.

Chwilowa szybkość zmiany, równania różniczkowe i całkowanie powinny być przedstawiane jako „pojęcia narzędziowe” a nie jako symboliczny zapis, służący do dokonywania przekształceń algebraicznych. Przykłady oraz wstęp do tego modułu pokazują jak to można osiągnąć.



Przykład typowego przekłamania w szkolnym podręczniku: wykres - wielkości fizycznej w funkcji czasu - jest mylony z trajektorią samochodu.

### 3. Ewaluacja wykorzystania TI

Komputery stały się obecnie najbardziej rozpowszechnionym narzędziem w nauce, wykorzystywanym w wielu aspektach działalności naukowej, od pomiarów i modelowania do pisania i synchronicznego komunikowania się. Użycie komputerów w nauczaniu przedmiotów przyrodniczych powinno więc być *naturalne*.

Komputery są szczególnie użyteczne przy uczeniu o **reprezentacjach dynamicznych**, takich jak wykresy i funkcje. Umożliwiają one bowiem użytkownikowi **jednoczesne korzystanie z wielu reprezentacji**. Jednak zaletą ta *niekoniecznie zapewnia powodzenie w uczeniu się - uczniowie mogą się pogubić w nadmiernej ilości jednoczesnych reprezentacji*. **Przemyślany udział nauczyciela w uczeniu się** jest niezbędny dla sensownego wykorzystania wielu reprezentacji. Polega on na prowadzeniu uczniów przez proces **werbalizacji** reprezentacji wizualnych i algebraicznych oraz proces **łączenia (kojarzenia) różnych reprezentacji** tego samego zjawiska.



## 4. Podejście dydaktyczne

Dobra organizacja pracy w klasie jest ważnym składnikiem skutecznego podejścia do nauczania. Dotyczy to szczególnie używania nowoczesnych narzędzi takich jak komputery i oprogramowanie. Zasadniczą cechą prawidłowego podejścia jest **połączenie pracy uczniów**, zarówno indywidualnej jak i w małych grupach, z **wykładem nauczyciela** skierowanym do całej klasy.

Typowym rozwiązaniem jest rozpoczęcie od zwrócenia się do całej klasy; uczniowie śledzą zajęcia dzięki rzutnikowi ekranowemu. Należy zapewnić, by ktoś z uczniów pracował na komputerze podłączonym do rzutnika - dzięki temu nauczyciel ma bezpośredni podgląd na problemy uczniów z korzystaniem z oprogramowania. To pozwala regulować zarówno tempo objaśniania prezentowanych koncepcji jak i oczekiwaną aktywność uczniów.

Większość nauczycieli dobrze wie, że uczniowie mają problemy z postępowaniem zgodnie z pisemną instrukcją, nawet kilkudzaniową. Pokonaniu tej trudności może służyć polecenie **zapoznania się z czynnościami przed** ich rozpoczęciem i zachęcenie do **przedyskutowania** - w klasie lub w grupie - **tego, co powinno zostać uzyskane za pomocą komputera**. *Dobłą zasadą byłoby rozpoczynanie pracy przez uczniów dopiero po dokładnym zorientowaniu się, co będą robić. Wtedy instrukcja służy im do ustalania szczegółów a nie jako zbiór wskazówek do postępowania.*

## III. Ćwiczenia / Warsztaty


### Warsztat 1: Badanie wykresów zależności położenia od czasu z wykorzystaniem ruchu myszki

Ten warsztat przedstawia:

- Wstęp do korzystania z równań i animacji ruchu obiektów w Modellusie;
- Po uruchomieniu pokazu wideo (obrazek w środku) pojawia się duże okno odtwarzania; pokazy wideo są bezdźwiękowe - jest to właściwe dla pomieszczeń z dużą liczbą komputerów.

**Workshop 1: Exploring position-time graphs moving the mouse**

- In this exercise, you'll build a simple direct manipulation model to study position-time graphs. If the Modellus program is not already open, double-click its icon.
- Click on the **Model window**. To create a variable for position, type  $x$ . Check to see that the variable you typed appears in green. Modellus uses different colors and font styles to display the parts of equations that you type in the Model window.
- The next step after entering the model is to **interpret**. The **Interpret button** opens Modellus to incorporate values you have entered in the model. Notice that in the Initial Conditions window, Modellus automatically creates empty forms for independent variables in your model.
- In the **Initial Conditions window**, assign the value "0" to the  $x$  by typing "0" in the text box.
- Now let's represent the model as an animation. Click on the **Animation window**. From the tool bar on the left side of the window, click to select the **Particle tool** and then left-click in the top middle of the window to place the particle there. A dialog box appears for assigning properties to the particle.
- For this example, you'll put a green particle in the Animation window, and you'll specify its **horizontal coordinate**. To specify the particle's horizontal coordinate, select  $x$  in the horizontal text box, and then click OK.
- From the tool bar, select the **Plotter tool** and then left-click near the bottom of the Animation window to position the plotter there. When the properties dialog box appears, select  $t$  (time) to specify the horizontal coordinate and select  $x$  to specify the vertical coordinate, and **Type 0.1** in the **Horizontal scale text box** (0% "xtarget" is the graph horizontally).
- Click the **Run button** at the Control window. In the Animation window, the ball remains stationary while the plotter graphs a position through time.
- While the simulation runs, you can **alter variables to see the effects on the animation**. Click the ball and move the mouse. (Press the left mouse button while you move the ball.) Notice how the graph changes as you move the ball over time.



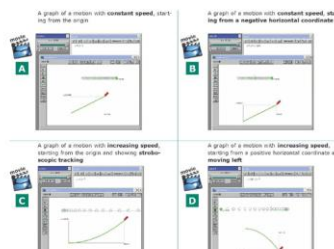
### Warsztat 2: Badanie wykresów zależności położenia od czasu za pomocą funkcji

Ten warsztat przedstawia:

- Sposób konstruowania modeli z funkcjami liniowymi i kwadratowymi;
- Ta strona i następne zawierają cztery pokazy wideo; obejrzenie każdego z nich wymaga użycia funkcji zoom-in (powiększania) z Adobe Acrobat.

**Workshop 2: Exploring position-time graphs with functions**

- In this exercise, you will see how to use simple mathematical models to study position-time graphs.
- Movie A shows a particle which horizontal coordinate is described by the function  $x = 10 \cdot t + 2$ . Look how the scale for the graph is changed, using the right button of the mouse.
- Movie B shows how to change the particle motion in order to start the motion from another position.
- Movie C shows the motion of the particle when its horizontal coordinate is described by a quadratic function of time. It also illustrates how to show stroboscopic tracking.
- Movie D shows another accelerating particle, moving from right to left.




### Warsztat 3: Badanie drgań w poziomie

Ten warsztat przedstawia:

- Badanie funkcji sinusoidalnych z wykorzystaniem możliwości zmian ich parametrów.

**Workshop 3: Exploring horizontal oscillations**

- In this exercise, you will see how to use a cosine function to create an horizontal oscillation and the corresponding position-time graph.
- Movie A shows how to create an oscillating particle. Look that the argument of the cosine function is expressed in degrees (this is the default option).
- Movie B shows how to introduce a parameter  $T$  (period of the oscillation) using a symbol on the model. This will be particularly useful when investigating different values for the parameter.
- Movie C shows what must be done if we want the argument of the cosine function to be expressed in radians. The **Options** button on the Control panel must be used to change from degrees to radians and vice-versa. Look that 360/T was also change to  $2\pi/T$ .
- Movie D shows how to create two set of parameters (named "Cases") for plotting two different values for the amplitude  $A$  of the oscillation. The small optional buttons on the top-left of the Animation window can be used to change from one Case to another.




### Warsztat 4: Badanie drgań w pionie

Ten warsztat przedstawia:

- Dalsze możliwości badania funkcji sinusoidalnych.

**Workshop 4: Exploring vertical oscillations**

- In this exercise, you will see how to create a particle oscillating vertically and explore different issues of this model, starting by those related with the initial phase of the oscillation.
- Movie A shows how to adapt the previous model (Workshop 3) in order to make the particle oscillate vertically. Usually, the symbol  $x$  is used to represent horizontal coordinates but it can be used to represent any coordinate (it could be changed to  $y$ , if you think that's relevant...).
- Movie B shows how to create two oscillating particles, vertically. The vertical oscillations are represented by  $t$  and  $2t$ . The two particles, have different colors, as well as the graphs. One of the particles has a parameter  $\phi_0$  that represent the initial phase. The movie illustrates how to explore different values for  $\phi_0$ , introducing values on the Initial Conditions window.
- Movie C shows a similar exploration but instead of giving values for  $\phi_0$  on the Initial Conditions window the values are given directly on the Model window.
- Movie D shows how to change one of the functions from cosine to sine and then illustrating how the model phase can be changed, either using an initial value for the phase or a time shift on the sine function.



## Warsztat 5: Tworzenie fali poprzecznej

Ten warsztat przedstawia:

- Jak wytworzyć poprzeczną falę w ośrodku składającym się z drgających punktów materialnych.

Workshop 5: Creating a transverse wave

In this exercise, you will see how to create a set of **exciting particles** that illustrates a **transverse wave** propagating in time and space.

**Movie A** shows how to create the **first particle**. Symbols are used to define amplitude and angular frequency and the phase angle is expressed in radians.

**Movie B** shows how to **add less more particles**, oscillating with the same period, but with an **increasing delay**...

**Movie C** shows how to **copy and paste the exciting function** for making a bigger body for each particle.

**Movie D** shows how to change the model in order to introduce a **step of compensating the delay as a function of the period** of the oscillation. It also illustrates the wave for different values of the delay.

## Warsztat 6: Analiza danych uzyskanych z obrazów

Ten warsztat przedstawia:

- Wykorzystanie narzędzi Modellusa do analizy obrazów i do tworzenia modeli z danych uzyskiwanych z obrazów.

Workshop 6: Analysing data using an image

In this exercise, you will see how to **analyse a graph**, created as an image of the background of the Animation window. The graph used was obtained with a motion sensor from a vertical oscillator on a spring.

**Movie A** shows how to **place an image (CSV or BMP format)** on the background of the Animation window and how to use the **first measuring tool** (Measure coordinates) to find the **amplitude between pixels and graph units** in each axis (scale factors).

**Movie B** shows how to use the **scale factors** of the graph to **measure the period** of the oscillation. The **Mouse sampler** is used to register measurements and the parameter period is computed on the Model window.

**Movie C** shows how to **measure the amplitude** of the oscillation.

**Movie D** shows how to **superimpose a graph of the oscillation**, obtained from the model created with the period and the amplitude. It also illustrates how to **change the model** in order to introduce an **initial phase** compatible with the experimental data and how to **create an exciting particle**, with a correct look.

## Warsztat 7: Badanie bezwładności za pomocą równań różniczkowych

Ten warsztat przedstawia:

- Badanie zasad dynamiki Newtona, z wykorzystaniem pojęcia chwilowej szybkości zmiany oraz równań różniczkowych.

Workshop 7: Exploring inertia with differential equations

In this exercise, you will see how to create models with **first and second order differential equations**.

**Movie A** shows a model that establishes that the **instantaneous rate of change of quantity  $x$**  is equal to 10 units. Then,  $x$  is considered an **angular coordinate** of a particle and the motion is animated on the Animation window.

**Movie B** shows how to create a **second order differential equation**, the instantaneous rate of change of quantity  $x$  is defined as  $qx$  and then the instantaneous rate of change of  $qx$  is defined as  $ax$ , considered as constant. This illustrates a motion where the change of velocity is constant, i.e., an uniformly accelerated motion.

**Movie C** shows how to **create a vector to represent acceleration** and how to **manipulate** that vector in order to change the magnitude and the direction of the acceleration.

**Movie D** shows how to change the model in order to **realize acceleration as the sum of the forces** and how to create a vector to represent the sum. Usually, the scale for each animation window object must be changed in order to have objects that are visible on the visible area.

## Warsztat 8: Badanie drgań za pomocą równań różniczkowych

Ten warsztat przedstawia:

- Tworzenie modelu oscylatora z wykorzystaniem prawa Hooke'a oraz równań różniczkowych.

Workshop 8: Exploring oscillations with differential equations

In this exercise, you will see how to use **differential equations to explore oscillations**, not damped and damped.

**Movie A** shows how to **define a force law** (Hooke's law), acceleration, velocity and position; the instantaneous rate of change of velocity is acceleration and the instantaneous rate of change of position is velocity.

**Movie B** shows how to **add vectors** that represent velocity and the force, as well as how to **add a graph** to show that velocity has a phase delay of  $\frac{1}{4}$  of a period.

**Movie C** shows how to **link vectors to the particle**.

**Movie D** shows how to change the model, **introducing a new term on the force law**, proportional to velocity, to illustrate how **damping** can affect the oscillation.

## Warsztat 9: Badanie prawa powszechnego ciążenia Newtona

Ten warsztat przedstawia:

- Tworzenie modelu ilustrującego newtonowskie prawo powszechnego ciążenia.

**Workshop 9: Exploring Newton's Law of Universal Gravitation**

In this exercise, you will see how to create a model of a body with a mass  $m_2$  orbiting around another body of mass  $m_1$ , assuming that body  $m_1$  is at rest.

**Movie A** shows how to define Newton's law of Gravitation and how to compute the acceleration components for body  $m_2$  from gravitational force and the coordinates of  $m_2$ .

**Movie B** shows how to use differential equations to express the relation between velocity and acceleration and position and velocity, for each component. Possible appropriate values are given to initial values of position and velocity, as well as for parameters (universal gravitational constant and masses  $m_1$  and  $m_2$ ).

**Movie C** shows how to change the value of parameters in order to increase the time of the orbiting body.

**Movie D** shows how to investigate what happens when the initial value of the velocity is changed and how to add vectors to represent acceleration and velocity of the orbiting body.

Defining the force law and expressing horizontal and vertical components of acceleration

Defining how to compute horizontal and vertical components of velocity, as well as horizontal and vertical coordinates

Using appropriate initial values to the initial and gravitational constants, other parameters, and initial values for velocity components and position

Creating vectors to show velocity and acceleration (using appropriate scales) and exploring how initial velocity relates to the equation

## Warsztat 10: Badanie kinetyki reakcji chemicznych i równowagi w reakcjach chemicznych za pomocą równań różniczkowych

Ten warsztat przedstawia:

- Tworzenie modelu ilustrującego kinetykę reakcji chemicznych, w tym zmian składu chemicznego po osiągnięciu równowagi; ilustrowanie pojęcia równowagi dynamicznej.

**Workshop 10: Exploring chemical kinetics and chemical equilibrium with differential equations**

In this exercise, you will see how to make a model of a first order chemical reaction and how to see how a chemical system reacts when the concentration of a reactant or a product is changed.

**Movie A** shows how to create a system of two coupled differential equations that represent how the concentration of the species A and B change for the reaction  $A \rightarrow B$ , assuming that the rate of reaction is proportional to the concentration of A. Appropriate values are given for the parameters and the initial values of A and B. The quantities A and B are represented by coloured vertical bars.

**Movie B** shows how to add graphs, with reasonable scales, to represent how A and B change with time.

**Movie C** shows how to change the equations in order to model a reversible reaction,  $A \rightleftharpoons B$ . It also shows how to run the model with different initial values.

**Movie D** shows how to explore how the system reacts when a sudden change happens in one of the species of the chemical system.

Creating a system of differential equations that describe a first order reaction and representing concentrations by coloured bars

Adding line graphs to see how concentrations change with time

Changing from a non-reversible reaction to a reversible reaction... and illustrating how to change initial conditions...

What happens when adding or subtracting a reactant or a product?

**Workshop 8: Exploring oscillations with differential equations**

In this exercise, you will see how to use differential equations to explore oscillations, not damped and forced.

**Movie A** shows how to define a force law (Hooke's law), acceleration, velocity and position, the instantaneous rate of change of velocity is acceleration and the instantaneous rate of change of position is velocity.

**Movie B** shows how to add vectors that represent velocity and the force, as well as how to add a graph to show that velocity has a phase delay of  $\frac{1}{4}$  of a period.

**Movie C** shows how to change the model, introducing a new term on the force law, proportional to velocity, to illustrate how damping can affect the oscillation.

Using vectors to show force and velocity... and creating a graph with proper scales to show velocity as a function of time...

Velocity can be linked to particles (or other entities), as shown in this workshop... (to release the film, click the water using the right button)

Changing the force law to introduce a term that depends on velocity to illustrate damping...